$e^{i\pi} = -1$

… donc Dieu existe !

La merveilleuse démonstration originale d'Euler en

1748

(pour tout public ayant fréquenté un lycée)

UDISS 16 avril 2018

V15/04/18

$e^{i\pi} = -1$

Préambule : Conférence pour une élite?

-> Rendre simple

1) **Introduction: l’anecdote**
2) **Préparation / rappels de quelques maths**

3) **Démonstration en 3 actes**
   – **Acte 1 : Un développement infiniment astucieux**
   – **Acte 2 : Formule de Moivre**
   – **Acte 3 : Le grand rapprochement final**

2) Introduction : L’anecdote rapportée en 1804

Saint-Pétersbourg en 1774 avec Catherine II de Russie et deux savants, Euler (croyant) et Diderot (athée)

Une anecdote rapportée en 1804 par un journaliste, Dieudonné Thiébault, met en scène le mathématicien Suisse Leonard Euler (croyant) et le philosophe français Denis Diderot (athée) à Saint-Pétersbourg en 1774.

L'impératrice Catherine II de Russie, très pieuse, avait invité les deux hommes afin de lui prouver l'existence, ou l'inexistence, de Dieu. Ils se rencontrèrent donc en 1774 devant Catherine II et sa cour.

Euler commença en déclarant « *Monsieur, e ipi = -1, donc Dieu existe,* répondez ! » .

Le désarroi de Diderot aurait provoqué les rires de la cour et, gêné, il aurait demandé à quitter la Russie.

Cependant, bien que belle, il est probable que l'anecdote soit fausse. Thiébault n'était pas présent, son récit est tardif (1804, soit 30 ans plus tard), et Diderot n'était pas étranger aux mathématiques – comme en atteste ses *Mémoires sur différents sujets de mathématiques,* entre autres.

Cette histoire a pourtant fait flores car, en ce temps là, il valait mieux démontrer que Dieu existe que son contraire.

Pour comprendre l'environnement mathématiques au temps d'Euler, il faut se rappeler que, **jusque dans les années 1500, il n'y avait pas ou peu de symboles mathématiques. Presque tous les raisonnements et calculs étaient exposés avec des mots.**

Les signes + et – datent de 1489 (Johannes Widmann) et le signe = de 1557 (anglais Robert Recorde).
Le Français François Viète (1540 – 1603) initiera l'utilisation des symboles et des inconnues par des lettres dans les équations vers 1600.

La plupart des symboles que nous connaissons aujourd'hui ont été établis juste avant 1700, et Euler nait en… 1707.

Moins d'un siècle plus tôt, Descartes (1596 – 1650) venait d'introduire le repère cartésien et de désigner par x l'inconnue dans une équation.
Ce symbole proviendrait de la première lettre du mot espagnol médiéval « xay » dérivé de « chouïa ». Ce mot, qui désigne une chose en arabe, fut introduit par le savant **Perse Al Kwarizmi** dans son « Al gèbre » qui signifie « la réduction » en arabe.

Donc la popularisation de la formalisation littérale des maths vient d'être établie quand Euler commence à faire des maths.

Euler (1707 – 1783) $e^{i\pi} = -1$ (1748)

Juste avant Euler (1707)

+, -   → 1489
=   → 1557
Viète → 1600
repère cartésien, x   → 1640

(x ← espagnol « xay » ← arabe « chouïa »)

3) Préparation et rappels mathématiques

1) $\mathbf{a^0} = 1$

2) $\mathbf{i^2} = -1$ (Bombelli **1572**)

3) **e** (=2,718....) et **Л**= 3,14... (irrationnels : pas a/b)

4) La formule de Moivre (en 1707): $(\mathbf{Cos\ x + i\ sin\ x})^N = \text{Cos } Nx + i \sin Nx$

5) $\mathbf{(1+b)^n = 1 + \frac{nb}{1!} + \frac{n(n-1)b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)b^3}{3!} + \ldots}$

Triangle de Pascal

Triangle de Pascal

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(1+b)^4 = 1 + 4b + 6b^2 + 4b^3 + b^4$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & \vdots & & \end{array}$$

$$(1+b)^N = 1 + Nb + \frac{N(N-1)b^2}{2!} + \frac{N(N-1)(N-2)b^3}{3!} + \ldots$$

- **Développement $(1+b)^n$**

$$(1+b)^n = 1 + \frac{nb}{1!} + \frac{n(n-1)b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)b^3}{3!} + $$

Avec $b = (kx/n)$

$(1 + kx/n)^n$ = …..

Apparition de « e »

- "e" commence à apparaître en **1683**, (environ 60 ans avant Euler) sans attirer l'attention,
- jusqu’à ce que Bernouilli s'intéresse aux calculs **d'intérêts composés**, ce qui l'amène à étudier la limite de la suite **$(1+1/n)^n$** qui tend vers 2,718...

Baptisé « b » par Leibniz (1690)

puis « e » par Euler (1728).

Histoire d’ « e »

- **"e" commence à apparaître, environ 60 ans avant Euler,** sans attirer l'attention, avec l’étude de courbes hyperboliques et des logarithmes de l’Ecossais Napier.
- **Et notamment en 1683 quand Bernoulli s'intéresse aux calculs d'intérêts composés**, ce qui l'amène à étudier la limite de la suite **(1+1/n)n qui est .. « e »,** sans vraiment l’identifier comme une valeur remarquable.
- Un certain Napier avait bien introduit la notion de logarithme vers 1600, mais le lien avec le nombre « e » n’a été remarqué que vers 1690 par Leibniz qui le baptisera initialement « b ».
- **Il sera ensuite appelé « e » par Euler en 1728**. Peut-être en référence à l’exponentielle par excellence, ou à son nom ?

Pourquoi l'apparition de (1+1/n)n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Intérêts 100% par an du capital a.

Un an $\longrightarrow$ $a + a$.

2 × 6 mois $\longrightarrow$ $a + \frac{a}{2} + \left(a + \frac{a}{2}\right)\frac{1}{2} = a\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)$

$= a\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$

12 × 1 mois $\longrightarrow$ $a\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$

n fois dans l'année $\longrightarrow$ $a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \times e$

4) Démonstration en 3 actes:

Acte I :

un développement infini astucieux

$$a^o = 1$$

$$a^\varepsilon = 1 + (\quad) = 1 + k\varepsilon \quad (k \text{ dépend de } a)$$

$$(a^\varepsilon)^N = (1 + k\varepsilon)^N$$

$$N\varepsilon = x \quad \text{" déterminé fixe "}$$

$$\varepsilon = \frac{x}{N}$$

$$a^{N\varepsilon} = a^x = \left(1 + k\frac{x}{N}\right)^N$$

$$= 1 + \frac{\cancel{N}\,kx}{1! \times \cancel{N}} + \frac{\cancel{N(N-1)}\,k^2x^2}{2!\,\cancel{N^2}} + \dots$$

$$a^x = \left(1 + k\frac{x}{N}\right)^N = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2!} +$$

$$a^x = \left(1 + \frac{kx}{N}\right)^N = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \cdots$$

$x = 1$ $$a = 1 + k + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \cdots$$

$k = 1$ $$a = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2,718\ldots$$

Appelons e cette valeur de a avec $k = 1$

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Fin de l'acte I

$$e^x = (1 + x/n)^n$$

Quand $n \to$ infini

Acte II :

Euler part de la formule de Moivre (1707) :

$(\text{Cos } x + i \text{ Sin } x)^N = \text{Cos } Nx + i \text{ Sin } Nx$

$$\begin{cases} (\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon)^N = \cos N\varepsilon + i \sin N\varepsilon \\ (\cos \varepsilon - i \sin \varepsilon)^N = \cos N\varepsilon - i \sin N\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos N\varepsilon = \dfrac{(\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon)^N + (\cos \varepsilon - i \sin \varepsilon)^N}{2} \\ \sin N\varepsilon = \dfrac{(\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon)^N - (\cos \varepsilon - i \sin \varepsilon)^N}{2i} \end{cases}$$

$N\varepsilon = x$ "déterminé fixe" $\left.\begin{array}{l} \varepsilon \to 0^+ \\ N \to +\infty \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \cos \varepsilon \simeq 1 \\ \sin \varepsilon \simeq \varepsilon = \dfrac{x}{N} \end{array}$

$$\begin{cases} \cos N\varepsilon = \dfrac{(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon)^N + (\cos\varepsilon - i\sin\varepsilon)^N}{2} \\ \sin N\varepsilon = \dfrac{(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon)^N - (\cos\varepsilon - i\sin\varepsilon)^N}{2i} \end{cases}$$

$N\varepsilon = x$ "déterminé fixe" $\left.\begin{array}{l} \varepsilon \to 0^+ \\ N \to +\infty \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \cos\varepsilon \simeq 1 \\ \sin\varepsilon \simeq \varepsilon = \frac{x}{N} \end{array}$

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{\left(1 + i\frac{x}{N}\right)^N + \left(1 - i\frac{x}{N}\right)^N}{2} \\ \sin x = \dfrac{\left(1 + i\frac{x}{N}\right)^N - \left(1 - i\frac{x}{N}\right)^N}{2i} \end{cases}$$

$$\cos x + i\sin x = \left(1 + \frac{ix}{N}\right)^N \quad N \to +\infty$$

Fin de l'acte II

$$\boxed{\text{Cos } x + i \sin x = (1 + ix/n)^n}$$

Démonstration Moivre

- Pour tous *x* et *y* réels, on a :
  - $\left(\cos x+\mathrm{i}\sin x\right)\left(\cos y+\mathrm{i}\sin y\right)=\left(\cos x\cos y-\sin x\sin y\right)+\mathrm{i}\left(\sin x\cos y+\cos x\sin y\right)$
- Or, $\cos(x+y)=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)$
  $\sin(x+y)=(\sin x\cos y+\cos x\sin y)$
- Donc (2), $\left(\cos x+\mathrm{i}\sin x\right)\left(\cos y+\mathrm{i}\sin y\right)=\cos(x+y)+\mathrm{i}\sin(x+y)$

  - Pour *n* = 1, la formule est vraie.
  - Supposons la formule vraie pour un entier *k* non nul. Alors,

$$\left(\cos x+\mathrm{i}\sin x\right)^k=\cos(kx)+\mathrm{i}\sin(kx)$$

- Ce qui donne :
  - $$\begin{aligned}\left(\cos x+\mathrm{i}\sin x\right)^{k+1}&=\left(\cos x+\mathrm{i}\sin x\right)^k\left(\cos x+\mathrm{i}\sin x\right)\\&=\left[\cos(kx)+\mathrm{i}\sin(kx)\right]\left(\cos x+\mathrm{i}\sin x\right)\end{aligned}$$
- Par la formule (2), il vient :
  - $$\left(\cos x+\mathrm{i}\sin x\right)^{k+1}=\cos((k+1)x)+\mathrm{i}\sin((k+1)x)$$

- Nous en déduisons que la formule est vraie au rang *k* + 1.

-> Acte III : Le grand rapprochement final entre l'acte I et l'acte II

Euler sait maintenant que :

- **Acte I** $e^x = (1 + x/n)^n$ quand n → infini
- **Acte II** $(1 + ix/n)^n = \cos x + i \sin x$ quand n → infini

donc $(1 + ix/n)^n = e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Alors si $x = \text{Л}$ -> $e^{i\text{Л}} = -1$

CQFD…

BONUS

Attention aux « infinis »

On peut « démontrer » que :

$$0 = 1 = 1/2$$

$$1 = 2$$

$$\frac{\sqrt{(4+h)} - 2}{h} = \text{« } 0/0 \text{ »} \quad (= 1/4)$$

$$\text{quand } h \rightarrow 0$$

$0 = 1 = 1/2$

$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ **$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$**

$1 = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$ Développement en série entière de :

$1 / (1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ $]-1,+1[$

Pour $X = 1$ alors **$1/2 = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$** **$\rightarrow$ $0 = 1 = 1/2$**

Un moine italien mathématicien (Grandi 1671- 1742) en tira même des conclusions métaphysiques sur l’origine du monde .(rien à voir avec le tableau du même nom de Courbet).

$1 = 2\dots$

$a = b \quad a^2 = ab$

$a^2 - b^2 = ab - b^2$ donc $(a - b)(a + b) = b(a - b)$

$(a + b) = b$ donc $2b = b$

Donc $2 = 1$

Limite de " $\frac{0}{0}$ "

<u>Ex</u> : $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h} = ?$ quand $h \longrightarrow 0$

$$\frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$\frac{\sqrt{4+h}^{2}-2^{2}}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{4+h-\cancel{4}}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$\lim_{h\to 0} \to \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$